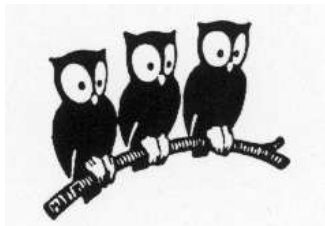


LES GAZ UNITAIRES

Y. Castin, S. Endo, F. Werner
LKB, École normale supérieure, Paris (France)



1 Définitions, expériences, modèle de contact de WBP

1.1 La limite unitaire en bref

À 3D, N particules, potentiel d'interaction $V(r)$ de portée b négligeable et de longueur de diffusion **infinie**.

Diffusion seulement dans l'onde s , avec l'amplitude f_k maximale compatible avec l'unitarité de la matrice S :

$$f_k = -\frac{1}{ik} \quad \forall k > 0$$

Cf. cours de Solovej : modèle de Hubbard fermionique **attractif** (avec U/t fixé bien choisi) à la limite d'un pas du réseau nul (taux de remplissage $\rightarrow 0$).

1.2 Longueur de diffusion dans l'onde s ($l = 0$)

État de diffusion de deux particules à $E = 0$ pour $r > b$:

$$0 \times \psi(r) \stackrel{r \geq b}{=} -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r \psi(r) + 0 \times \psi(r)$$

$$\psi(r) \stackrel{r \geq b}{=} \alpha + \beta/r = \beta(r^{-1} - a^{-1})$$

1.3 Les expériences

Gaz d'atomes fermioniques de spin $1/2$ froids ($T \ll T_F$) et peu denses ($k_F b < 10^{-2}$, $b_{vdW} =$ quelques nm).

Résonance de Feshbach magnétique :

$$(k_F |a|)^{-1} < 10^{-2}$$

1.4 Modèle de contact de Wigner-Bethe-Peierls

Remplacer $V(r)$ par des conditions aux limites (au contact, CC). $\forall i \in \uparrow, \forall j \in \downarrow, \exists A_{ij}(\mathbf{R}_{ij}, (r_k)_{k \neq i,j})$ tel que

$$\psi(r_1, \dots, r_N) \underset{r_{ij} \rightarrow 0}{=} (r_{ij}^{-1} - a^{-1}) A_{ij} + O(r_{ij})$$

L'opérateur Hamiltonien est celui du gaz parfait :

$$H = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_{\mathbf{r}_i} + \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2$$

Le gaz unitaire existe $\leftrightarrow H$ avec CC et antisymétrie fermionique est autoadjoint

Invariance d'échelle : si $\psi(\mathbf{R})$ obéit aux CC alors ψ_λ aussi, avec

$$\psi_\lambda(\mathbf{R}) \equiv \psi(\mathbf{R}/\lambda)$$

2 De l'espace libre à $E = 0$ au cas piégé

2.1 Solution de $E = 0$ dans l'espace libre

On peut la choisir invariante d'échelle, avec CdM au repos

$$\psi_0(\mathbf{R}) = R^{s-(3N-5)/2} \phi(\Omega)$$

Jacobi : $3N - 4$ hyperangles et l'hyperrayon

$$m_u R^2 = \sum_i m_i (r_i - C)^2$$

$H\psi_0 = 0$ impose

$$\Delta_\Omega \phi = \left[\left(\frac{3N-5}{2} \right)^2 - s^2 \right] \phi$$

plus CC, donc ensemble discret de valeurs de s avec

$$s^2 \in \mathbb{R}$$

2.2 Dans un piège

Après séparation du CdM : ansatz obéissant aux CC,

$$\psi_{\text{rel}}(\mathbf{R}) = F(R) R^{-(3N-5)/2} \phi(\Omega)$$

$$E_{\text{rel}} F(R) = -\frac{\hbar^2}{2m_u} \Delta_{\mathbf{r}}^{2D} F(R) + \left(\frac{\hbar^2 s^2}{2m_u R^2} + \frac{1}{2} m_u \omega^2 R^2 \right) F(R)$$

Quelles conditions aux limites en $R = 0$?

$$F(R) \underset{R \rightarrow 0}{=} C_+ R^s + C_- R^{-s} + O(R^{2-s})$$

- $s > 1$: $F(R) \sim R^s$
- $0 < s < 1$: en principe $F(R) = (R/\ell)^s \pm (R/\ell)^{-s} + O(R^{2-s})$, en pratique $F(R) \sim R^s$

- $s^2 < 0$: effet Efimov à N corps, forcément introduire ℓ tel que

$$F(R) = (R/\ell)^s - (R/\ell)^{-s} + O(R^{2-s})$$

Nombre infini de noeuds, nombre infini d'états liés à N corps

$$E_n^{\omega=0} \propto -\frac{\hbar^2}{m_u \ell^2} e^{-2\pi n/|s|}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

2.3 Un peu de dynamique

Cas $s > 0$:

$$E_q^{\text{rel}} = (s + 1 + 2q)\hbar\omega, \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

Existence d'un mode non amorti de pulsation 2ω .

Conséquence aussi d'une symétrie dynamique $SO(2, 1)$.

N.B. Tout ceci est valable si absence d'effet Efimov à k corps, $\forall k < N$

3 Comment déterminer l'exposant d'échelle s ?

3.1 Ansatz de Faddeev (espace libre, énergie nulle)

Au sens des distributions, $H \frac{1}{r_{ij}} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}(-4\pi)\delta(r_{ij})$ donc

$$H\psi = \sum_{i \in \uparrow, j \in \downarrow} \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} A_{ij} ((r_k - R_{ij})_{k \neq i, j}) \delta(r_{ij})$$

$$\psi = H^{-1} \sum_{i \in \uparrow, j \in \downarrow} \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} A_{ij} ((r_k - R_{ij})_{k \neq i, j}) \delta(r_{ij})$$

Antisymétrie fermionique :

$$A_{ij} = (-1)^{i-1} (-1)^{j-(N_{\uparrow}+1)} A$$

CC à a quelconque :

$$M[A] = a^{-1}A$$

Si invariance d'échelle, ansatz $A = R_A^{s_A+1-(3N-5)/2} \phi_A(\Omega_A)$
donc

$$\mathcal{M}_{s_A}[\phi_A] = 0 \text{ ou } \infty$$

Fonction transcendante d'Efimov

$$\Lambda(s_A) \equiv \det \mathcal{M}_{s_A}$$

$a^{-1} = 0$	$a = 0$
$\psi = (r_{ij}^{-1} - a^{-1})A + o(1)$	$\psi = (1 - a/r_{ij})A + o(1)$
$s_\infty = s_A$	$s_0 = s_A + 1$
$\Lambda(s_\infty) = 0$	$\Lambda(s_0 - 1) = \infty$

Les exposants d'échelle s du gaz unitaire (parfait) sont les racines (un plus les pôles) de Λ .

3.2 Application : recherche d'effets Efimov

- 1975 (Efimov, Bulgac) $\uparrow\uparrow\downarrow$: $\exists s_{\infty}^2 < 0$ pour $\frac{m_{\uparrow}}{m_{\downarrow}} > 13,6069 \dots$
- 2010 (Castin, Mora, Pricoupenko) $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow$: $\exists s_{\infty}^2 < 0$ pour $13,384 \dots < \frac{m_{\uparrow}}{m_{\downarrow}} < 13,6069 \dots$
- 2015 (Endo, Castin) $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$: pas d'effet Efimov à 4 corps

4 Application au développement du viriel ou en cumulants

4.1 La méthode du régulateur harmonique

Systeme piégé à l'équilibre thermique grand canonique (la limite $\omega \rightarrow 0$ donne le système homogène). Grand poten-

tiel

$$\Omega = -k_B T \ln \left(\sum_{N_\uparrow, N_\downarrow} Z_{N_\uparrow, N_\downarrow} z_\uparrow^{N_\uparrow} z_\downarrow^{N_\downarrow} \right)$$

avec les fugacités $z_\sigma = e^{\beta\mu_\sigma}$ et les fonctions de partition canoniques $Z_{N_\uparrow, N_\downarrow}$.

Limite de faible densité $\mu_\sigma \rightarrow -\infty$ à T fixée : développement en cumulants

$$\Omega = -k_B T Z_{1,0} \sum_{N_\uparrow, N_\downarrow} B_{N_\uparrow, N_\downarrow} z_\uparrow^{N_\uparrow} z_\downarrow^{N_\downarrow}$$

Considérer les écarts au gaz parfait (notés Δ) pour éliminer les états insensibles aux interactions. Séparer le CdM :

$$Z_{N_\uparrow, N_\downarrow} = Z_{1,0} Z_{N_\uparrow, N_\downarrow}^{\text{rel}}$$

Les cumulants d'ordre n se déduisent des niveaux d'énergie internes des problèmes à k corps, $k \leq n$.

$$\begin{aligned}\Delta B_{1,1} &= \Delta Z_{1,1}^{\text{rel}} \\ \Delta B_{2,1} &= \Delta Z_{2,1}^{\text{rel}} - Z_{1,0} \Delta B_{1,1} \\ \Delta B_{3,1} &= \Delta Z_{3,1}^{\text{rel}} - Z_{1,0} Z_{2,0}^{\text{rel}} \Delta B_{1,1} - Z_{1,0} \Delta B_{2,1}\end{aligned}$$

4.2 En termes des racines et des pôles de Λ

Ces racines et ces pôles donnent en effet le spectre du gaz unitaire et du gaz parfait.

$$S = \sum_n e^{-u_n \bar{\omega}} - e^{-v_n \bar{\omega}} \quad (\bar{\omega} \equiv \beta \hbar \omega)$$

Évoque une somme de résidus donc une intégrale sur un lacet. Figure au tableau :

- u_n pôle de $\frac{\Lambda'(z)}{\Lambda(z)} e^{-z \bar{\omega}}$ avec un résidu $+1$

- v_n pôle de $\frac{\Lambda'(z)}{\Lambda(z)} e^{-z\bar{\omega}}$ avec un résidu -1

En pratique, le calcul de $\Lambda(z)$ est simple sur l'axe imaginaire pur car les éléments de matrice de \mathcal{M}_y sont bornés. Si z décrit \mathbb{C} faire un prolongement analytique (**faisable pour $2 + 1$ seulement ?**).

4.2.1 Cumulant d'ordre 3 : c'est expédié

$$\Delta B_{2,1} = \frac{S_{2,1}}{2\text{sh } \bar{\omega}}$$

$$\Delta B_{2,1} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dS}{4\pi} \frac{\sin(\bar{\omega}S)}{\text{sh}(\bar{\omega}S)} \frac{d}{dS} [\ln \Lambda_{2,1}(iS)]$$

Peut être étendu au cas efimovien.

Paradoxe autour du seuil efimovien : $\Delta B_{2,1}$ doit être une fonction lisse de $m_{\uparrow}/m_{\downarrow}$. Résolu en incluant un paramètre

de résonance à 3 corps ℓ aussi du côté non efimovien ($0 < s < 1/2$).

4.2.2 Cumulant d'ordre 4 : c'est la perplexité

$$\Delta B_{3,1} = \frac{S_{3,1}}{2\text{sh } \bar{\omega}} - Z_1 \Delta B_{2,1}$$

et pourtant

$$\exists \lim_{\bar{\omega} \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{dS}{4\pi} \frac{\sin(\bar{\omega} S)}{\text{sh}(\bar{\omega} S)} \frac{d}{dS} [\ln \Lambda_{3,1}(iS)]$$

5 Certaines de nos publications sur le sujet

Toutes sont disponibles sur l'archive ouverte HAL.

- Vue d'ensemble sur les propriétés de symétrie du gaz unitaire :

- Y. Castin, F. Werner, chapitre 5 de l’ouvrage collectif “The BCS-BEC crossover and the unitary Fermi gas” (dirigé par W. Zwerger, Lecture Notes in Physics, Springer, 2011)
- sur le mode non amorti de pulsation 2ω :
 - Y. Castin, Comptes Rendus Physique 5, 407 (2004)
- sur la symétrie dynamique $SO(2, 1)$ et la séparabilité en coordonnées hypersphériques :
 - F. Werner, Y. Castin, Phys. Rev. A 74, 053604 (2006)
- sur le développement en cumulants :
 - bosons : Y. Castin, F. Werner, Revue canadienne de physique 91, 382 (2013)
 - fermions : Chao Gao, S. Endo, Y. Castin, Europhysics Letters 109, 16003 (2015)

- sur la présence ou l'absence d'effet Efimov à 4 corps :
 - $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow$: Y. Castin, C. Mora, L. Pricoupenko, Phys. Rev. Lett. 105, 223201 (2010)
 - $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$: S. Endo, Y. Castin, Phys. Rev. A 92, 053624 (2015)